SF1624 Algebra och geometri

Nittonde föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

1 december, 2009

Egenvektorer och egenvärden

Betrakta en linjär avbildning T med kvadratisk matris A. Från igår vet vi att

- *egenvärdena* till T är rötterna till *karaktäristiska ekvationen* $\det(A - xI) = 0$.
- *egenvektorerna* till T är de nollskilda lösningarna till $T(\overline{u}) = a\overline{u}$, där a är något egenvärde till T.

Vi ska se på ett par tillämpningar av egenvektorer:

- Markovkedjor
- PageRank i Google

Markovkedjor

En Markovkedja är en stokastisk process där systemets tillstånd vid en tidpunkt beror på föregående tillstånd genom

$$\overline{x}(i+1) = A\overline{x}(i), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots$$

och där A är en *stokastisk matris*, dvs en matris som uppfyller

- alla element är ≥ 0
- alla kolonnsummor är 1

En utfallsvektor är en vektor $\overline{x}$ av sannolikheter vars summa är 1. Alltså är kolonnerna i en stokastisk matris utfallsvektorer.

Exempel

Matrisen $A = \begin{pmatrix} 0,67 & 0,4 \\ 0,33 & 0,6 \end{pmatrix}$ definierar en Markovkedja. Om vi börjar med initialvektorn, $\overline{x}(0) = (0,33,\ 0,67)^t$ får vi

$$\overline{x}(1) = A\overline{x}(0) = \begin{pmatrix} 0,67 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,67 \\ 0,33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5809 \\ 0.4191 \end{pmatrix}$$

Stabila utfall

I många fall kommer vi att *konvergera* mot ett stabilt utfall efter tillräckligt många iterationer. Alltså finns ett $\overline{x}(\infty)$ sådant att

$$\lim_{i\to\infty} \overline{x}(i) = \lim_{i\to\infty} A^i\overline{x}(0) = \overline{x}(\infty)$$

Sats

Ett stabilt utfall är en egenvektor till A med egenvärde 1*.*

Exempel

För matrisen A kan vi hitta egenvektorerna med egenvärde 1 genom Gausselimination

$$\left(\begin{array}{rr|r} -0,33 & 0,4 & 0 \\ 0,33 & -0,4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{lr|r} 1 & -1.21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och den stabila utfallsvektorn är $\overline{x}(\infty) \approx (0,5479,\ 0,4521)^t$.

PageRank i Google

1998 skapade Dergey Brin och Larry Page den rankningsmetod för webbsidor som används i Google.

- Problemet är att från en lång lista av sidor rangordna dem så att de *viktigaste* står först.
- Idén i deras metod är att viktiga sidor blir länkade till av många viktiga sidor.

Om vi har en lista av webbsidor $W_1, W_2, \ldots, W_N$ ser vi på en rankningsvektor, $R = (r_1, r_2, \ldots, r_N)$ som uppfyller

$$r_i = \sum_{j:W_j \mapsto W_i} \frac{r_j}{N_j}$$

där N_j är antalet länkar på sidan W_j. (Om alla sidor har länkar.)

Rankningsvektorn som egenvektor

Om alla sidor har länkar till andra sidor kan vi se rankningsvektorn som en egenvektor till en matris.
Låt A vara matrisen med element

$$a_{i,j} = \frac{\text{antal länkar från } W_j \text{ till } W_i}{\text{antal länkar på } W_j}$$

A blir nu en stokastisk matris och rankningsvektorn en egenvektor till A med egenvärde 1.